Gravitation und bilokale Feldtheorie

F. Vollendorf

(Z. Naturforsch. **30 a**, 642—644 [1975]; eingegangen am 11. März 1975)

Gravitation and Bilocal Field Theory

The starting point is the conjecture that a field theory of elementary particles can be constructed only in a bilocal version. Thus the 4-dimensional space time has to be replaced by the 8-dimensional manifold $\hat{R}^8$ of all ordered pairs of space time events. With special reference to the Schwarzschild metric it is shown that the embedding of the space time into the manifold $\hat{R}^8$ yields a description of the gravitational field.

1. Einleitung

In einer vorangegangenen Arbeit [1] wurde ausgeführt, daß der Ring $\mathbb{C}^8$ der Cayley-Zahlen von grundlegender Bedeutung für eine Theorie der internen Symmetrien der Elementarteilchen sein dürfte. Es stellt sich die Frage, ob auch die raumzeitlichen Eigenschaften der Elementarteilchen mit Hilfe von Cayley-Zahlen dargestellt werden können. Das scheint nicht ohne weiteres möglich zu sein, da der Ring $\mathbb{C}^8$ in einem unmittelbaren Zusammenhang mit achtdimensionalen Mannigfaltigkeiten steht, die Raumzeit dagegen ein vierdimensionales Kontinuum bildet.

Nun hat Katayama [2] darauf hingewiesen, daß sich gewisse Schwierigkeiten in der Quantenfeldtheorie beheben lassen, wenn diese Theorie in einer bilokalen Version aufgebaut wird. Verallgemeinert man dieses Ergebnis, so kann man vermuten, daß sich nicht die vierdimensionale Raumzeit selbst, sondern die Mannigfaltigkeit $\hat{R}^8$ aller geordneten Paare von Punkten X und Y der Raumzeit als grundlegend für eine Theorie der Elementarteilchen erweisen wird. Damit liegt der Gedanke nahe, diese Mannigfaltigkeit $\hat{R}^8$ mit Hilfe der Cayley-Zahlen zu beschreiben.

Die folgenden Überlegungen zeigen, daß sich auf diese Weise überraschend einfache Verbindungen zur Einsteinschen Gravitationstheorie aufweisen lassen.

2. Ausgezeichnete Systeme von Koordinaten

Bei der Aufstellung seiner Gravitationstheorie ließ sich Einstein [3] von der Forderung leiten, daß allgemeine Naturgesetze so zu formulieren sind, daß sie in bezug auf beliebige Systeme von Koordinaten x_λ gültig sind. (Griechische Indizes sollen stets von 0 bis 3 laufen.) Das schließt jedoch nicht aus, daß es trotzdem Koordinaten gibt, welche durch besondere Eigenschaften ausgezeichnet sind. Ein Beispiel hierfür bilden die harmonischen Koordinaten [4].

In raumzeitlichen Gebieten, in welchen die Gravitationskräfte vernachlässigt werden können, sind durch die Trägheitsbewegung Systeme von Koordinaten $u^\lambda = u^\lambda{}_{(x_\nu)}$ ausgezeichnet, welche als Intertialsysteme bezeichnet werden. Mit ihrer Hilfe läßt sich der Raumzeit über ein Abstandsdifferential ds die Minkowskische Metrik aufprägen:

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}u^0)^2 - \sum_{n=1}^{3} (\mathrm{d}u^n)^2 . \tag{1}$$

Durch Einführung eines weiteren Systems von ausgezeichneten Koordinaten $u_\lambda = u_{\lambda(x_\nu)}$ wird in dem durch die Nebenbedingungen

$$u_{0(x_\nu)} = u^0{}_{(x_\nu)} \quad \text{und} \quad u_{n(x_\nu)} = -u^n{}_{(x_\nu)} \tag{2}$$

festgelegten Spezialfall Gl. (1) zur Gl. (3) vereinheitlicht:

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{\lambda=0}^{3} \mathrm{d}u^\lambda \, \mathrm{d}u_\lambda \tag{3}$$

(Kleine lateinische Indizes sollen von 1 bis 3 laufen.)

Mit den Definitionen

$$u^\lambda|_\nu : = (\partial u^\lambda / \partial x_\nu), \qquad u_\lambda|_\nu : = (\partial u_\lambda / \partial x_\nu)$$

und

$$h_{\nu\mu} : = \sum_{\lambda=0}^{3} u^\lambda|_\nu \, u_\lambda|_\mu \tag{4}$$

erhält Gl. (3) die kovariante Form (5):

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{\nu,\mu=0}^{3} h_{\nu\mu} \, \mathrm{d}x_\nu \, \mathrm{d}x_\mu . \tag{5}$$

Die speziellen Nebenbedingungen (2) werden nun aufgegeben. Es soll zunächst lediglich verlangt wer-

Sonderdruckanforderungen an Dr. F. Vollendorf, *D-3554 Marburg-Cappel*, Berliner Str. 1.

den, daß die Variablen u^λ und u_λ (mit Ausnahme gewisser singulärer Stellen) zweimal stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten x_ν sind.

3. Ein Variationsprinzip

Mit der soeben vorgenommenen Verallgemeinerung ergibt sich die Möglichkeit, die insgesamt acht speziellen Koordinaten u^λ und u_λ als Feldgrößen anzusehen. Für diese soll nun ein Variationsprinzip formuliert werden. Zu diesem Zweck wird mit Hilfe der beiden Funktionaldeterminanten

$$Z:=\operatorname{Det}(u_\lambda|_\mu) \tag{6}$$

und

$$N:=\operatorname{Det}(u^\lambda|_\mu) \tag{7}$$

das Integral (8) gebildet:

$$I:=\int_G \sqrt{-Z\,N}\,\mathrm{d}^4x\,, \tag{8}$$

$$\mathrm{d}^4x:=\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,.$$

I ist offensichtlich vom System der Koordinaten x_ν unabhängig. Ein Variationsprinzip wird nun in der Form

$$\delta I=0 \tag{9}$$

mit der Nebenbedingung

$$\delta u_\lambda=\delta u^\lambda \tag{10}$$

angesetzt. Auf dem Rand des Integrationsgebietes G des Integrals I sollen die Variationen δu^λ und δu_λ den Wert 0 annehmen. Aus (6) bis (10) folgen dann für die 16 Variablen

$$L_{\lambda\mu}:=\frac{1}{2\,c}\,\frac{\partial Z}{\partial u_\lambda|_\mu}+\frac{c}{2}\,\frac{\partial N}{\partial u^\lambda|_\mu}$$

mit

$$c:=\sqrt{-(Z/N)} \tag{11}$$

die vier Feldgleichungen (12):

$$\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\mu}L_{\lambda\mu}=0\,. \tag{12}$$

Bemerkenswert an der durch (11) definierten Größe c ist, daß sie vom System der Koordinaten x_μ unabhängig ist.

4. Verallgemeinerte Minkowskische Metriken

Eine Lösung $[u^\lambda{}_{(x_\mu)}, u_{\lambda(x_\mu)}]$ der Gl. (12) soll statisch und rotationssymmetrisch heißen, wenn sie Bedingungen der Form

$$\mathrm{d}u_0=\mathrm{d}u^0$$

und

$$u_n=-g_{(\zeta)}\,u^n$$

mit

$$\zeta:=\left[\sum_{m=1}^{3}(u^m)^2\right]^{1/2} \tag{13}$$

genügt. Es läßt sich nachrechnen, daß jede statische rotationssymmetrische Lösung der Gl. (12) unter Benutzung geeigneter Koordinaten t, r, ϑ und φ folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
u^0&=t+b\,, & u_0&=t-b,\\
u^1&=(a+r)\cos\vartheta\cos\varphi, & u_1&=(a-r)\cos\vartheta\cos\varphi,\\
u^2&=(a+r)\cos\vartheta\sin\varphi, & u_2&=(a-r)\cos\vartheta\sin\varphi,\\
u^3&=(a+r)\sin\vartheta, & u_3&=(a-r)\sin\vartheta;
\end{aligned} \tag{14}$$

a und b sind dabei beliebige reelle Konstanten. Durch Vertauschen der Variablen u^0 mit u_0 bzw. u^n mit $(-u_n)$ erkennt man, daß die zusätzlichen Bedingungen

$$b\geqq 0 \quad\text{und}\quad a\geqq 0$$

keine Einschränkung der Allgemeinheit bedingen. Mit (14) spezialisieren sich die Gln. (6), (7), (11), (13) und (3) folgendermaßen:

$$Z=-(1-a/r)^2\,,$$

$$N=(1+a/r)^2\,,$$

$$c=(r-a)/(r+a)\,, \tag{15}$$

$$\zeta=r+a\,, \tag{16}$$

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}t)^2-(\mathrm{d}r)^2-(r^2-a^2)\,[(\mathrm{d}\vartheta)^2+\cos^2\vartheta\,(\mathrm{d}\varphi)^2]\,. \tag{17}$$

Für $a=0$ geht (17) in die Minkowskische Metrik über. Es sei nun $[u^\lambda{}_{(x_\mu)}, u_{\lambda(x_\mu)}]$ eine beliebige Lösung der Feldgleichungen (12). Dann soll die durch (3) definierte $(\mathrm{d}s)$-Metrik als eine verallgemeinerte Minkowskische Metrik bezeichnet werden.

5. Verallgemeinerte Schwarzschildsche Metriken

Für eine beliebige Lösung $[u^\lambda{}_{(x_\mu)}, u_{\lambda(x_\mu)}]$ der Gl. (12) wird mit Hilfe der Variable

$$t:=\tfrac{1}{2}(u^0+u_0)$$

und unter Benutzung der Definitionen (3) und (11) eine weitere Metrik eingeführt:

$$(\mathrm{d}\tau)^2:=c\,(\mathrm{d}t)^2+c^{-1}[(\mathrm{d}s)^2-(\mathrm{d}t)^2]\,. \tag{18}$$

Im Spezialfall zu $c=1$ geht diese Metrik in die verallgemeinerte Minkowskische Metrik über. Wie man leicht sehen kann, ist das Abstandsdifferential $\mathrm{d}\tau$ von der Wahl der Koordinaten x_μ unabhängig. In dem Spezialfall zu (14) reduziert sich (18) mit (15) und (17) zur Schwarzschildschen Metrik in harmonischen Koordinaten [4]:

$$\mathrm{d}\tau)^2 = \frac{r-a}{r+a}\,(\mathrm{d}t)^2 - \frac{r+a}{r-a}\,(\mathrm{d}r)^2 - (r+a)^2\,[(\mathrm{d}\vartheta)^2 + \cos^2\vartheta\,(\mathrm{d}\varphi)^2]. \quad (19)$$

Mit (16) erhält man die übliche Form:

$$(\mathrm{d}\tau)^2 = (1-2\,a/\zeta)\,(\mathrm{d}t)^2 - (1-2\,a/\zeta)^{-1} \cdot (\mathrm{d}\zeta)^2 - \zeta^2\,[(\mathrm{d}\vartheta)^2 + \cos^2\vartheta\,(\mathrm{d}\varphi)^2].$$

Ein Vergleich von (18) und (19) zeigt, daß der Ausdruck

$$U := (c-1)/(c+1)$$

als das Newtonsche Gravitationspotential zu interpretieren ist.

Durch (18) ist die $(\mathrm{d}\tau)$-Metrik für jede Lösung der Gl. (12) festgelegt. Sie soll als die dieser Lösung zugeordnete verallgemeinerte Schwarzschildsche Metrik bezeichnet werden.

6. Reelle Cayley-Zahlen und die Mannigfaltigkeit $\hat{R}^8$

Mit den erzielten Ergebnissen läßt sich der Gedanke der Einleitung wieder aufgreifen, eine Grundlage für eine zu konstruierende bilokale Feldtheorie der Elementarteilchen bereitzustellen. Zu diesem Zweck wird eine Lösung $[u^\lambda{}_{(x_\mu)}, u_{\lambda(x_\mu)}]$ der Gl. (12) vorgegeben. Es seien weiterhin X und Y zwei Raumzeitpunkte mit den Koordinaten x_μ und y_μ. Jedem Element (X, Y) aus $\hat{R}^8$ kann nun unter Benutzung der Bezeichnungsweisen aus der schon erwähnten Arbeit [1] die Cayley-Zahl

$$u_{(X,Y)} := \sum_{\lambda=0}^{3} [u^\lambda{}_{(x_\mu))}\,\beta^\lambda + u_{\lambda(y_\mu)}\,\beta_\lambda]$$

zugeordnet werden. Unter der Voraussetzung, daß die Funktionaldeterminanten (6) und (7) stets ungleich 0 sind, ist diese Zuordnung sogar umkehrbar eindeutig. Auf diese Weise wird man dazu geführt, an Stelle der Mannigfaltigkeit $\hat{R}^8$ den Raum R^8 aller Cayley-Zahlen der Form

$$u := \sum_{\lambda=0}^{3} (u^\lambda\,\beta^\lambda + u_\lambda\,\beta_\lambda)$$

mit reellen Koordinaten u^λ und u_λ zu betrachten. Die Elemente aus R^8 sollen als reelle Cayley-Zahlen bezeichnet werden. Eine Verallgemeinerung von Gl. (3) liefert eine auf R^8 definierte und unmittelbar auf $\hat{R}^8$ übertragbare Metrik:

$$(\mathrm{d}s)^2 := \sum_{\lambda=0}^{3} \mathrm{d}u^\lambda\,\mathrm{d}u_\lambda. \quad (20)$$

Es soll erwähnt werden, daß sich die $(\mathrm{d}\tau)$-Metrik ebenfalls unmittelbar zu einer Metrik des gesamten Raumes R^8 erweitern läßt.

7. Abschließende Bemerkungen

Das schon erwähnte Ergebnis einer Veröffentlichung von Katayama [2] führt zu dem Gedanken, nach einer bilokalen Version der klassischen Gleichungen von Maxwell und Dirac zu suchen. Als Ausgangspunkt bietet sich aufgrund der bisher durchgeführten Überlegungen der Raum R^8 mit der durch (20) gegebenen Metrik an.

Darüber hinaus erscheint es erfolgversprechend zu sein, zu versuchen, mit den gleichen mathematischen Hilfsmitteln eine bilokale Feldtheorie aller Elementarteilchen zu konstruieren.

Dieser Gedanke erhält eine unerwartete Stützung durch ein Ergebnis aus der relativistischen Quantentheorie der „Stränge" (relativistic quantum strings).

Einen Strang kann man als ein eindimensional ausgedehntes System von Elementarteilchen interpretieren. Zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines Strangs muß der sich auf ein punktförmiges Teilchen beziehende Begriff einer zeitartigen Weltlinie zum Begriff einer raumzeitartigen „Weltfläche" erweitert werden.

Wie Rebbi [5] ausführt, genügen solche Weltflächen einem von Nambu eingeführten rein geometrischen Prinzip des extremalen Flächeninhalts. Dieses Prinzip von Nambu stellt nun einerseits – wie Rebbi bemerkt – eine Verallgemeinerung des Prinzips der extremalen Länge der Weltlinie eines punktförmigen Teilchens dar.

Andererseits läßt sich Nambus Prinzip als ein Spezialfall zu dem durch die Gln. (8) und (9) eingeführten Extremalprinzip ansehen.

Insgesamt erhält man damit einen deutlichen Hinweis auf enge Zusammenhänge zwischen der Gravitation und der starken Wechselwirkung.

[1] F. Vollendorf, Cayley-Zahlen und Erhaltungsgesetze für Elementarteilchen, Z. Naturforsch. **30a**, 432 [1975].

[2] Y. Katayama, Bilocal Theory of Quantum Electrodynamics, Prog. Theor. Phys. **50**, 1430 [1973].

[3] A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. **49**, 769 [1916].

[4] V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, Akademie-Verlag, Berlin 1960.

[5] C. Rebbi, Dual Models and Relativistic Quantum Strings, Phys. Reports **12 C**, 1 [1974].